

Chap 1.2

极限

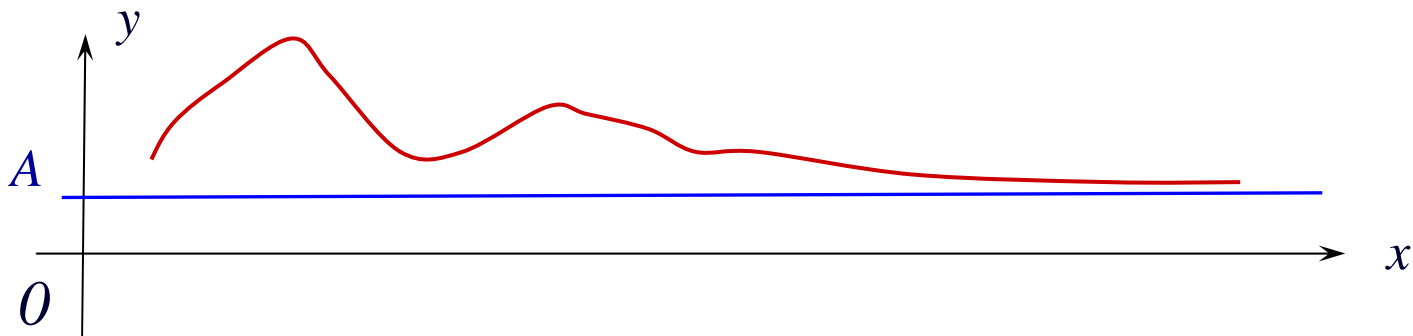
1.2.1 概念

□ $x \rightarrow +\infty$ 时的函数极限

若自变量 x 的值无限增大时，函数 $f(x)$ 无限趋近于常数 A ，则称函数 $f(x)$ 当 $x \rightarrow +\infty$ 时**极限为 A** 或**收敛于 A** ，记作

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A \quad \text{或} \quad f(x) \rightarrow A \quad (\text{当 } x \rightarrow \infty \text{ 时})$$

➤ 极限是一种变化的定量趋势：与 A 的接近程度 $|f(x) - A|$ 可以任意小(只要 x 充分大)



- ▶ 极限的这样定义是描述性的，真正科学严格的定义由数学大师 **柯西**与**魏尔斯特拉斯**完成



柯西 Augustin Louis Cauchy
(1789 – 1857)

- ▶ 19世纪最卓越的数学家之一，论文800余篇(26卷)，数量仅次于Euler
- ▶ 给出了微积分一系列基本概念的严格定义，包括极限定义(经过魏尔斯特拉斯的加工)
- ▶ 1805年进入高等工业学校学习，打算成为土木工程师，因数学上的成就被推荐为科学院院士

现代分析之父 魏尔斯特拉斯



(Weierstrass, Karl Theodor Wilhelm
1815 - 1897)

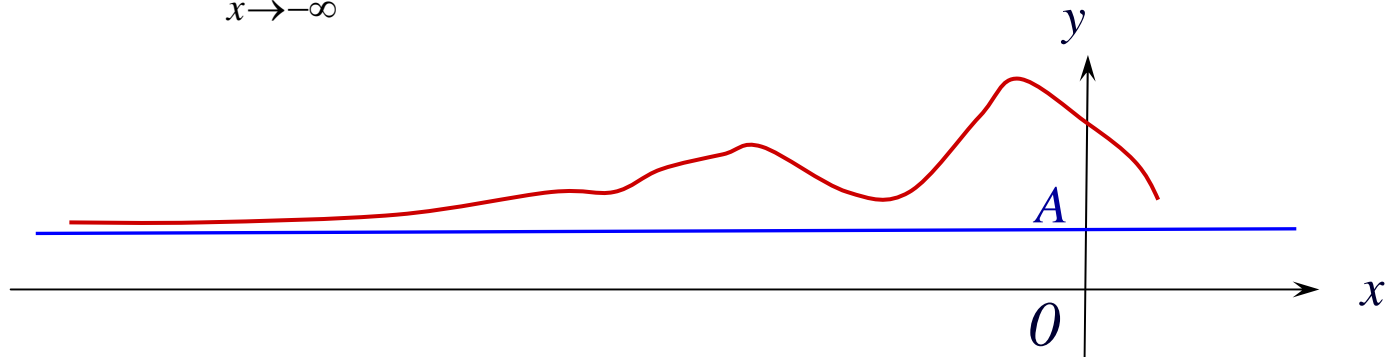
- 函数论的奠基者，以科学的语言，系统建立了实分析和复分析的基础
- 1834年在波恩大学学法律和财政后转学数学，在中学教写作与体育，41岁才任柏林大学讲师
- 卓越的教师，讲课朴实无华，循循善诱；柏林大学第一个数学讨论班，学生中约100名正教授，包括著名的俄国女科学家柯瓦列夫斯卡娅

例 1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0,$ 2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} q^x = 0, \quad (0 < q < 1)$

3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$ 4) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin x = ?$

➤ $x \rightarrow -\infty$ 时的函数极限怎样描述?

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$$



$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = ?$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} q^x = 0, \quad (q?)$$

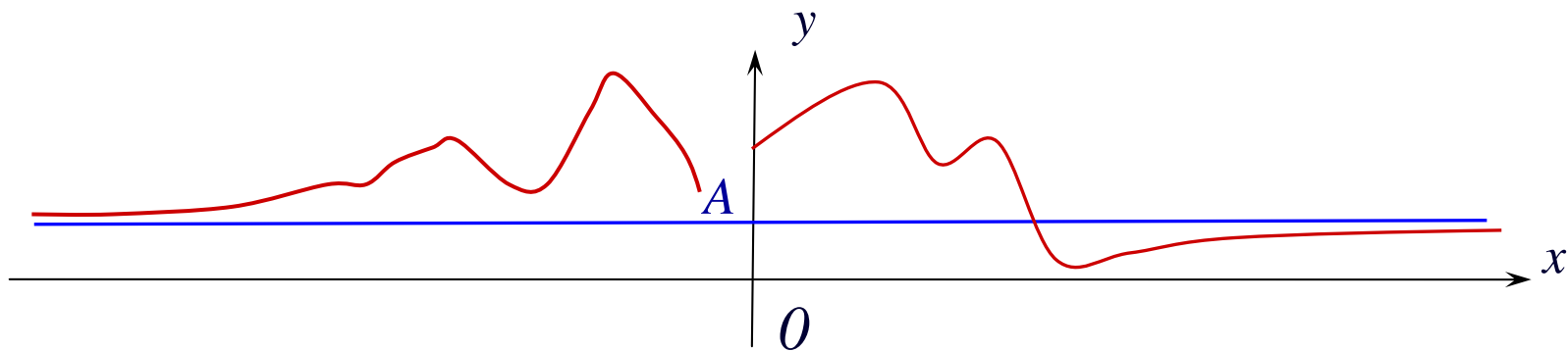
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan x = ?$$

□ $x \rightarrow \infty$ 时的函数极限

若自变量 x 的绝对值无限增大时, 函数 $f(x)$ 无限趋近于常数 A , 则称函数 $f(x)$ 当 $x \rightarrow \infty$ 时的**极限**为 A 或**收敛**于 A , 记作

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$$

➤ 这时函数的图像怎样?



由此导出当 $x \rightarrow \infty$ 时与 $x \rightarrow \pm\infty$ 时函数极限的关系

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \quad \xleftrightarrow{\text{充分必要}} \quad \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A \\ \text{且} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A \end{array}$$

例 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$ $\lim_{x \rightarrow \infty} q^x = ?$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \arctan x = ?$$

□ 数列极限

数列可看作

$$x_n = f(n) \quad (n \text{ 自然数})$$

➤ $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$ 的定义怎样?

(尝试对照 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$ 的定义)

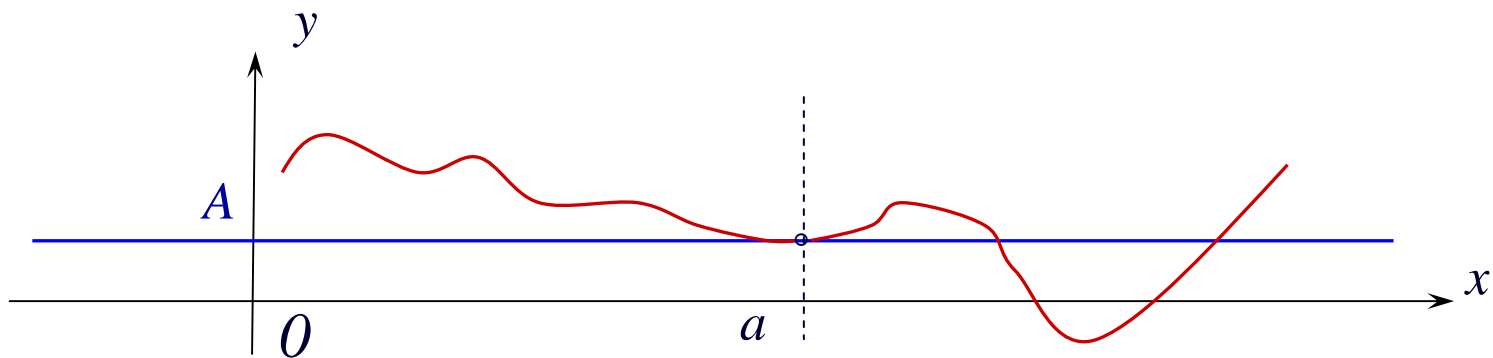
显然有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0 \quad (0 < q < 1)$$

□ $x \rightarrow a$ 时的函数极限

设函数 $f(x)$ 在点 a 附近(邻域)有定义, 当 x 无限接近 a 时, $f(x)$ 无限趋近于常数 A , 则称 $f(x)$ 当 $x \rightarrow a$ 时的**极限**为 A 或**收敛**于 A , 记作

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \quad \text{或} \quad f(x) \rightarrow A \quad (\text{当 } x \rightarrow a \text{ 时})$$



➤ 这极限是 x 趋近于 a 时 $f(x)$ 的变化趋势，故与 $f(a)$ 无关
 ($f(x)$ 甚至可以在 a 无定义) 也与 a 附近以外 f 的值无关

例 $\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0$ $\lim_{x \rightarrow x_0} c = c$

□ $x \rightarrow a^+$ 时的函数极限 (单侧极限)

设函数 $f(x)$ 在 a 右侧邻域有定义，当 $x > a$ 且无限接近 a 时，函数 $f(x)$ 无限趋近于常数 A ，则称 A 为 $f(x)$ 当 $x \rightarrow a$ 时的**右极限**，记为

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = A \quad \text{或} \quad f(a+0) = A$$

➤ 类似地有 $f(x)$ 在 a 的**左极限** $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = A$

➤ 双侧极限与单侧极限的关系

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \quad \xleftrightarrow{\text{充分必要}} \quad \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = A \\ \text{且} \quad \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = A \end{array}$$

例 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} x = x_0$ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x} = ?$

1.2.2 极限的运算法则

□ 初等运算

若 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = B$, $h(x)$ 有界,

1) $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \pm g(x)] = A \pm B$

2) $\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = AB$, $\lim_{x \rightarrow a} f^m(x) = A^m$

当 $A = 0$, $\lim_{x \rightarrow a} f(x)h(x) = 0$

$$3) \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B} \quad (B \neq 0)$$

$$4) \lim_{x \rightarrow a} \sqrt[m]{f(x)} = \sqrt[m]{A} \quad \left(\begin{array}{l} f(x) \geq 0 \text{ 时, } m \text{ 为自然数} \\ f(x) < 0 \text{ 时, } m \text{ 为奇数} \end{array} \right)$$

➤ 这里的 $x \rightarrow a$ 可换成 x 的其它极限过程

□ 复合运算法则

$$\lim_{u \rightarrow l} f(u) = A, \quad \lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = l, \quad \text{在 } a \text{ 附近 } \varphi(x) \neq l$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(\varphi(x)) = A$$

➤ 复合运算法则意味着在命题条件下

$$\lim_{x \rightarrow a} f(\varphi(x)) \stackrel{u=\varphi(x)}{=} \lim_{u \rightarrow l} f(u)$$

(极限运算中可以作变量代换)

例 计算下列极限

$$1) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-3}{x^2-1}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{2x - 2}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - \sqrt{2x+2}}{x^2 - 1}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 4x^2 + 2}{2x^3 + x - 3}$$

可推出

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \cdots + a_m}{b_0 x^k + b_1 x^{k-1} + \cdots + a_k} = \begin{cases} \frac{a_0}{b_0} & m = k \\ 0 & m < k \\ \infty & m > k \end{cases}$$

$$5) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{2n} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$$

$$6) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^n + (-3)^n}{4^{n+1} + 3^{n+1}}$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \sin x$$

$$8) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n}{n^2} \right)$$

已知 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{f(3x)} = 2$, 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(2x)}{x} = ?$

例 若 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + ax + b}{x - 2} = 5$, 求 a, b

H.W 习题1

9 (2) (3) (5) (6) (9)

补充题

求下列极限

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt{2n^2 + 1} - \sqrt{2n^2 - 1})$$

$$2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3^x + 5^{x+1}}{2^{x+1} - 5^x}$$

$$3) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{3}{n^2} + \cdots + \frac{2n-1}{n^2} \right)$$

若 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 - x}{x+1} + ax - b \right) = 0$, 求 a, b

1.2.2 两个重要的极限

□ 判别准则1 (夹逼准则)

$$\begin{array}{l} \text{在 } a \text{ 附近, } g(x) \leq f(x) \leq h(x) \\ \text{且 } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = A \end{array} \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$$

例 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2 + n}} \right)$

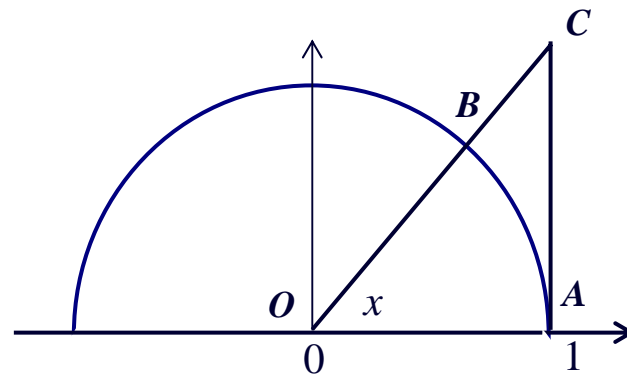
□ 重要极限

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

➤ 证明步骤：先推出

$$\text{当 } 0 < |x| < \frac{\pi}{2} \text{ 时, } \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$

再利用夹逼准则导出结论



➤ 附带的结论：

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$$

例 求极限

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow a} \frac{\tan(x - a)}{x - a}$$

□ 判别准则2

单调有界数列 x_n 必有极限

□ 重要极限

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

➤ 利用准则2 推出 $x_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ 有极限, 记为

$$e = \lim_n (1 + \frac{1}{n})^n$$

再用夹逼准则导出结论

➤ 如果联系复合函数的极限就得到

若当 $x \rightarrow a$ 时, $\Delta \rightarrow 0$, 则 $(1 + \Delta)^{\frac{1}{\Delta}} \rightarrow e$

例 求下列极限

$$1) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\alpha}{x}\right)^{\beta x}$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n-1}{2n+1}\right)^n$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \tan x)^{\cot x}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^{x+1}$$

例 $\lim_{n \rightarrow \infty} a^{\frac{1}{n}} = 1 \quad (a > 1)$ 可导出 $\lim_{x \rightarrow 0} a^x = 1$

$$\text{求 } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[x]{1 + 2^x + 3^x}$$

H.W

10 (1) (4) (5) (7)

11 (1) (3) (5) 12

补充题* 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2 + 1} + \frac{1}{n^2 + 2} + \cdots + \frac{1}{n^2 + n} \right)$

证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$